Olympiadeklasse **8**

62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

620844

Untersuche, ob es voneinander verschiedene natürliche Zahlen m und n größer als 0 gibt, für die es 2^m aufeinanderfolgende natürliche Zahlen und 2^n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen derart gibt, dass die Summe der 2^m Zahlen gleich der Summe der 2^n Zahlen ist.

620845

Beweise: Für alle natürlichen Zahlen a, b und c mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist $a \cdot b \cdot c$ durch 60 teilbar.

620846

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ sei D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Die Gerade CD und der Umkreis des Dreiecks AEC schneiden einander im vom Punkt C verschiedenen Punkt P.

Beweise: Die Strecke $\overline{CP}$ ist eineinhalbmal so lang wie ein Radius des Umkreises des Dreiecks ABC.

Olympiadeklasse **9**

62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

620944

Rudi und Simon gehen jede Woche auf dem Waldweg zwischen Adorf und Bedorf spazieren. Rudi wohnt in Adorf, Simon wohnt in Bedorf. Jeder geht mit seiner eigenen konstanten Geschwindigkeit daheim los bis zum anderen Ort und dann wieder zurück nach Hause.

Heute sind beide genau um 12 Uhr mittags losgegangen. Zum ersten Mal haben sie sich heute bei der alten Eiche getroffen, die genau 3 km von Adorf entfernt ist. Einige Zeit später kamen sie gleichzeitig bei der Grillhütte an, die genau 4 km von Adorf entfernt liegt.

Wie weit ist der Weg von Adorf nach Bedorf? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

620945

Es sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, auf dessen Peripherie zwei Punkte A und B gegeben sind, die nicht auf einem Durchmesser liegen. A und B sind in k durch einen Streckenzug l ohne Selbstüberschneidungen verbunden, welcher die Fläche von k in zwei Teile gleichen Inhalts teilt.

Zeigen Sie, dass die Länge dieses Streckenzugs länger als $2r$ ist.

620946

Wir betrachten in dieser Aufgabe eine Ungleichung für positive Zahlen a und b mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 = 18$.

Zeigen Sie, dass für alle solche Zahlenpaare (a, b) die Ungleichung

$$\frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-b} \geq 1$$

gilt.

Olympiadeklasse **10**

62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

621044

Rudi und Simon gehen jede Woche auf dem Waldweg zwischen Adorf und Bedorf spazieren. Rudi wohnt in Adorf, Simon wohnt in Bedorf. Jeder geht mit seiner eigenen konstanten Geschwindigkeit daheim los bis zum anderen Ort und dann wieder zurück nach Hause.

Heute sind beide genau um 12 Uhr mittags losgegangen. Zum ersten Mal haben sie sich heute bei der alten Eiche getroffen, die genau 3 km von Adorf entfernt ist. Einige Zeit später kamen sie gleichzeitig bei der Grillhütte an, die genau 1 km von der alten Eiche entfernt liegt.

Wie weit ist der Weg von Adorf nach Bedorf? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

621045

Es sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, auf dessen Peripherie zwei Punkte A und B gegeben sind, die nicht auf einem Durchmesser liegen. A und B sind in k durch einen Streckenzug l ohne Selbstüberschneidungen verbunden, welcher die Fläche von k in zwei Teile gleichen Inhalts teilt.

Zeigen Sie, dass die Länge dieses Streckenzugs länger als $2r$ ist.

621046

Zu jeder positiven ganzen, nicht durch 3 teilbaren Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Lösungspaare (a, b) der Diophantischen Gleichung

$$a^2 + 2b^2 = 3n \tag{1}$$

mit positiven ganzen Zahlen a, b.

Beweisen Sie, dass $r(n)$ genau dann ungerade ist, wenn es eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl m gibt, für die $n = m^2$ oder $n = 2m^2$ gilt.

Olympiadeklasse **11**

62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

621144

Man bestimme alle Tripel (a, b, c) ganzer Zahlen mit

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}\,.$$

621145

Die Höhen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ des spitzwinkligen Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt H. Der Punkt C_0 ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Gerade g liegt symmetrisch zur Geraden CC_0 bezüglich der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$. Die Gerade h liegt symmetrisch zur Geraden HC_0 bezüglich der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle AHB$.

Man beweise, dass der Schnittpunkt der Geraden g und h auf der Geraden $A'B'$ liegt.

621146

Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ hat drei reelle Nullstellen $x_1 < x_2 < x_3$. Man zeige, dass für jede positive ganze Zahl n der Wert $\lceil x_3^n \rceil$ durch 3 teilbar ist.

Hinweis: Für eine reelle Zahl a bezeichnet $\lceil a \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner ist als a, es gilt also $\lceil a \rceil - 1 < a \leq \lceil a \rceil$.

Olympiadeklasse **12**

62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

621244

Man bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen mit

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}\,.$$

621245

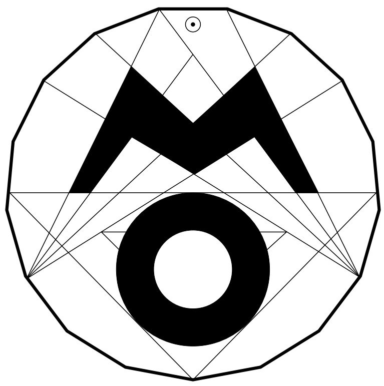
Die Höhen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ des spitzwinkligen Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt H. Der Punkt C_0 ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Gerade g liegt symmetrisch zur Geraden CC_0 bezüglich der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$. Die Gerade h liegt symmetrisch zur Geraden HC_0 bezüglich der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle AHB$.

Man beweise, dass der Schnittpunkt der Geraden g und h auf der Geraden $A'B'$ liegt.

621246

Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ hat drei reelle Nullstellen $x_1 < x_2 < x_3$. Man zeige, dass für jede positive ganze Zahl n der Wert $\lceil x_3^n \rceil$ durch 3 teilbar ist.

Hinweis: Für eine reelle Zahl a bezeichnet $\lceil a \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner ist als a, es gilt also $\lceil a \rceil - 1 < a \leq \lceil a \rceil$.



62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Lösungen – 2. Tag

620844 Lösung *6 Punkte*

Angenommen, es gibt voneinander verschiedene natürliche Zahlen m und n größer als 0 sowie 2^m aufeinanderfolgende und 2^n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen derart, dass die Summe der 2^m Zahlen gleich der Summe der 2^n Zahlen ist. Die kleinste der 2^m Zahlen wird mit a, die kleinste der 2^n Zahlen mit b bezeichnet. Dann sind a, $a+1$, $a+2$, …, $a+2^m-1$ die 2^m aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ab a und für deren Summe s_a gilt

$$s_a = 2^m \cdot a + \frac{1}{2} \cdot (2^m - 1) \cdot 2^m = 2^m \cdot a + (2^m - 1) \cdot 2^{m-1}\,.$$

Weiter sind b, $b+1$, $b+2$, …, $b+2^n-1$ die 2^n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ab b und für deren Summe s_b gilt

$$s_b = 2^n \cdot b + \frac{1}{2} \cdot (2^n - 1) \cdot 2^n = 2^n \cdot b + (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}\,.$$

Wegen $s_a = s_b$ folgt

$$2^m \cdot a + (2^m - 1) \cdot 2^{m-1} = 2^n \cdot b + (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}\,.$$

Da m und n voneinander verschiedene Zahlen sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m < n$ angenommen werden. Mit Division durch 2^{m-1} folgt

$$2 \cdot a + 2^m - 1 = 2^{n-m+1} \cdot b + (2^n - 1) \cdot 2^{n-m}\,.$$

Wegen $n > m > 0$ sind 2^m, 2^{n-m+1} und 2^{n-m} gerade Zahlen. Da a und b natürliche Zahlen sind, steht daher links in der Gleichung eine ungerade Zahl, im Widerspruch dazu rechts in der Gleichung aber eine gerade Zahl. Die Annahme ist daher falsch.

Folglich gibt es keine voneinander verschiedene natürliche Zahlen m und n größer als 0 sowie 2^m aufeinanderfolgende und 2^n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen derart, dass die Summe der 2^m Zahlen gleich der Summe der 2^n Zahlen ist.

620845 Lösung *7 Punkte*

Es seien a, b und c natürliche Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Wir zeigen, dass eine der Zahlen a, b und c durch 3, eine dieser Zahlen durch 5 sowie mindestens zwei dieser Zahlen gerade sind oder eine dieser Zahlen durch 4 teilbar ist und daher $a \cdot b \cdot c$ durch 60 teilbar ist.

Angenommen, keine der Zahlen a, b und c ist durch 3 teilbar. Dann haben sie den Rest 1 oder 2 bei Division durch 3, ihre Quadrate folglich alle den Rest 1 bei Division durch 3. Daher hat $a^2 + b^2$ den Rest 2, aber c^2 den Rest 1 bei Division durch 3 im Widerspruch zu $a^2 + b^2 = c^2$. Folglich ist mindestens eine der Zahlen a, b und c durch 3 teilbar.

Angenommen, keine der Zahlen a, b und c ist durch 5 teilbar. Dann haben sie den Rest 1, 2, 3 oder 4 bei Division durch 5, ihre Quadrate folglich die Reste 1, 4, 4 oder 1 bei Division durch 5. Daher hat $a^2 + b^2$ den Rest $0, 2$ oder 3, aber c^2 den Rest 1 oder 4 bei Division durch

5 im Widerspruch zu $a^2 + b^2 = c^2$. Folglich ist mindestens eine der Zahlen a, b und c durch 5 teilbar.

Es können nicht a, b und c ungerade sein, da sonst $a^2 + b^2$ gerade ist und c^2 ungerade, was $a^2 + b^2 = c^2$ widerspricht. Also ist mindestens eine der Zahlen a, b und c gerade.

Angenommen, es ist nur eine der Zahlen a, b und c gerade.

Fall 1: Es seien a gerade, b und c ungerade. Dann existieren ganze Zahlen k, m und n mit $a = 2 \cdot k$, $b = 2 \cdot m + 1$, $c = 2 \cdot n + 1$ und es folgt $4 \cdot k^2 + 4 \cdot m^2 + 4 \cdot m + 1 = 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$ und daher

$$k^2 = n^2 - m^2 + n - m = (n - m) \cdot (n + m) + (n - m) = (n - m) \cdot (n + m + 1)\,.$$

Da eine der Zahlen $n - m$ und $n + m + 1$ gerade ist, ist k^2 gerade. Hieraus folgt, dass k gerade ist und daher a durch 4 teilbar ist.

Fall 2: Es seien b gerade, a und c ungerade. Durch Vertauschen von a mit b erhalten wir den vorherigen Fall, weswegen b durch 4 teilbar ist.

Fall 3: Es seien c gerade, a und b ungerade. Dann existieren ganze Zahlen k, m und n mit $a = 2 \cdot k + 1$, $b = 2 \cdot m + 1$, $c = 2 \cdot n$ und es folgt

$$4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 + 4 \cdot m^2 + 4 \cdot m + 1 = 4 \cdot n^2\,.$$

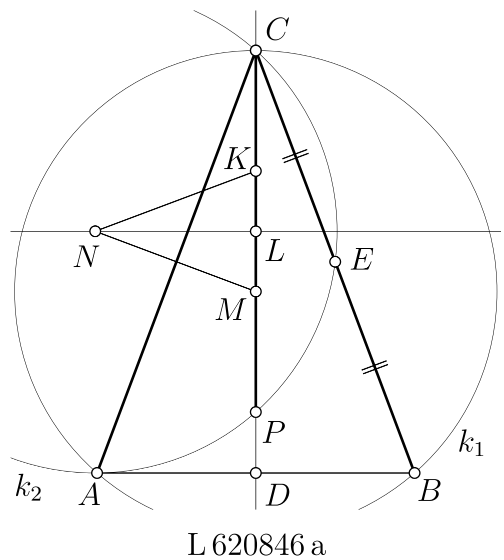
Die linke Seite der Gleichung hat den Rest 2, die rechte den Rest 0 bei Division durch 4. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

Folglich sind mindestens zwei der Zahlen a, b und c gerade oder eine von ihnen ist durch 4 teilbar.

Da $a \cdot b \cdot c$ durch 3, 4 und 5 teilbar ist, ist $a \cdot b \cdot c$ durch 60 teilbar, was zu beweisen war.

<u>620846 Lösung</u> *7 Punkte*

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Umkreises k_1 des Dreiecks ABC mit M, den Mittelpunkt des Umkreises k_2 des Dreiecks AEC mit N, den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CM}$ mit K und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{KM}$ mit L, siehe Abbildung L 620846 a.

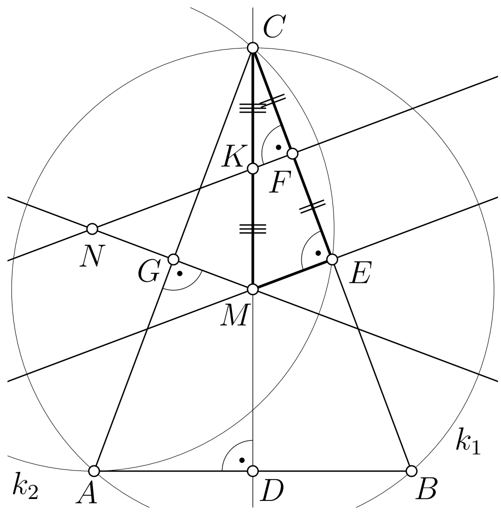


L 620846 a

Wir zeigen, dass L der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CP}$ ist. Wegen der Wahl der Punkte K und L gilt nämlich $|\overline{CL}| = \frac{3}{4} \cdot |\overline{CM}|$, womit dann die Behauptung $|\overline{CP}| = \frac{3}{2} \cdot |\overline{CM}|$ sofort folgt.

Der Beweis, dass L der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CP}$ ist, gliedert sich in *drei Schritte*. Im *ersten Schritt* werden bestimmte Lagebeziehungen untersucht. Im *zweiten Schritt* wird gezeigt, dass $|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle NKM|$ gilt. Im *dritten Schritt* wird hieraus gefolgert, dass die Gerade CD senkrecht auf der Geraden LN steht und daher P der Spiegelpunkt des Punktes C bei der Spiegelung an der Geraden LN ist, womit schließlich folgt, dass L der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CP}$ ist.

Schritt 1: Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$ mit F und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ mit G. Wegen $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$ gilt auch $\left|\overline{CE}\right| = \left|\overline{CG}\right|$, siehe Abbildung L 620846 b.



L 620846 b

Da das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$ ist und der Punkt D Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist, ist die Gerade CD die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, weswegen $\sphericalangle CDA$ ein rechter Winkel ist und die Gerade CD verschieden von der Geraden AD ist. Da der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks auf den Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks liegt, liegt der Punkt M daher auf der Geraden CD. Da das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$ ist, liegt der Punkt M sogar auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ und ist verschieden vom Punkt C. Da die Gerade CD verschieden von der Geraden AD ist, haben die Geraden AC und CD nur den Punkt C gemeinsam, weswegen der Punkt G auf AC und der Punkt M auf CD verschiedene Punkte sind.

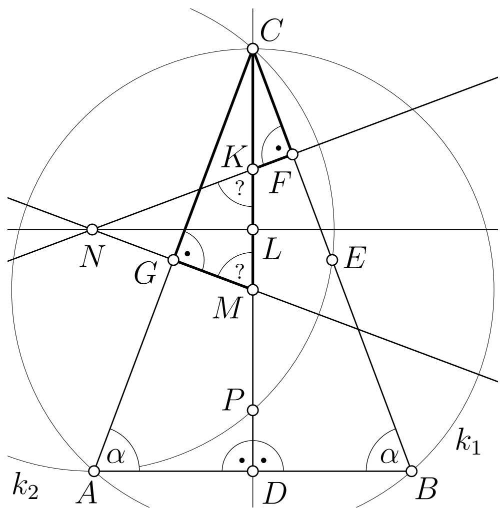
Da M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist, liegt er auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AC}$. Da G der Mittelpunkt dieser Strecke und verschieden von M ist, ist die Gerade GM diese Mittelsenkrechte. Da der Punkt N der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AEC ist, liegt er ebenfalls auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AC}$, also auch auf der Geraden GM.

Da die Punkte B und C voneinander verschieden sind, ist E als Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ein von den Punkten B und C verschiedener Punkt und der Punkt F ist als Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$ ein von den Punkten C und E verschiedener Punkt. Da die Punkte B und C auf dem Kreis k_1 um den Punkt M liegen, verläuft die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BC}$ durch die Punkte E und M und ist daher die Gerade EM. Da die Punkte C und E auf dem Kreis k_2 um den Punkt N liegen, verläuft die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{CE}$ durch die Punkte F und N und ist daher die Gerade FN. Die Geraden EM und FN stehen daher beide senkrecht auf der Geraden BC. Folglich sind die Geraden EM und FN nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes parallel zueinander und die Punkte F und N liegen in derselben Halbebene bezüglich der Geraden EM. Da der Punkt F zwischen den Punkten C und E liegt, liegt auch der Punkt C in dieser Halbebene.

Wir zeigen nun, dass auch der Punkt G in dieser Halbebene liegt. Die Gerade CM ist auch Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ABC. Bei einer Spiegelung an dieser Geraden wird daher der Strahl $\overrightarrow{CB}$ auf den Strahl $\overrightarrow{CA}$ abgebildet. Der Punkt E liegt als Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ auf dem Strahl $\overrightarrow{CB}$ und der Punkt G liegt als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ auf dem Strahl $\overrightarrow{CA}$. Da die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC auch gleich lang sind, gilt $\left|\overline{CE}\right| = \left|\overline{CG}\right|$. Der Punkt E wird durch diese Spiegelung daher auf einen Punkt auf den Strahl $\overrightarrow{CA}$ abgebildet, der denselben Abstand zum Punkt C hat wie der Punkt E, also auf den Punkt G. Der im rechtwinkligen Dreieck CME spitze Innenwinkel $\sphericalangle EMC$ wird daher auf den spitzen Winkel $\sphericalangle CMG$ abgebildet. Folglich gilt $|\sphericalangle EMC| + |\sphericalangle CMG| = |\sphericalangle EMG| < 180°$, womit der Punkt G tatsächlich in der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden EM liegt wie der Punkt C. Da der Punkt N auf der Geraden GM und auch in dieser Halbebene liegt, liegt er auf dem Strahl $\overrightarrow{MG}$ und ist verschieden vom Punkt M.

Wir betrachten das Dreieck CME. Da die Geraden EM und FN parallel zueinander sind und F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$ ist, schneidet die Gerade FN nach einer Umkehrung des Satzes über die Mittellinie im Dreieck die Seite $\overline{CM}$ in deren Mittelpunkt, also im Punkt K.

Schritt 2: Wir bezeichnen die Größe der nach dem Basiswinkelsatz gleich großen Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CBA$ mit α. Da der Punkt D nach Definition der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist, gelten auch $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ und $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CBA| = \alpha$, siehe Abbildung L 620846 c.



L 620846 c

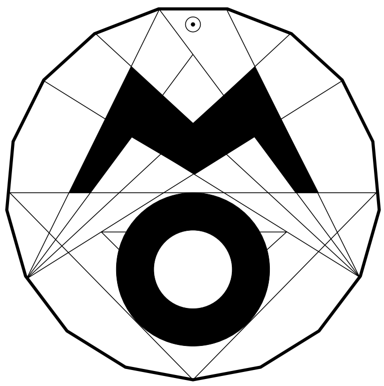
Wir betrachten nun die Dreiecke ADC und CGM. Da der Punkt M auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ liegt und der Punkt G nach Definition der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist, gilt $\sphericalangle GCM = \sphericalangle ACD$. Da die Gerade CD die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist, gilt $|\sphericalangle CDA| = 90°$. Da die Gerade GM die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$ ist, gilt $|\sphericalangle MGC| = 90°$. Die Dreiecke ADC und CGM stimmen daher nach dem Dreiecksinnenwinkelsatz auch in der Größe des dritten Innenwinkels überein, es gilt also $|\sphericalangle CMG| = |\sphericalangle DAC| = \alpha$. Da der Punkt K nach Definition Mittelpunkt der Strecke $\overline{CM}$ ist und der Punkt N auf dem Strahl $\overrightarrow{MG}$ liegt und verschieden von M ist, gilt $\sphericalangle KMN = \sphericalangle CMG$ und wegen $|\sphericalangle CMG| = \alpha$ daher auch $|\sphericalangle KMN| = \alpha$.

Wir betrachten die Dreiecke BCD und CKF. Da nach Definition E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$ sind, liegt der Punkt F auf dem Strahl $\overrightarrow{CB}$. Da zudem der Punkt K auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ liegt und verschieden von C ist, gilt $\sphericalangle DCB = \sphericalangle KCF$. Da die Gerade CD die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist, gilt $|\sphericalangle BDC| = 90°$. Da der Punkt K auf der Mittelsenkrechten FN der Strecke $\overline{CE}$ liegt und verschieden von F ist, gilt $|\sphericalangle CFK| = 90°$. Die Dreiecke BCD und CKF stimmen daher nach dem Dreiecksinnenwinkelsatz auch in der Größe des dritten Innenwinkels überein, es gilt also $|\sphericalangle FKC| = |\sphericalangle CBD| = \alpha$. Da die Winkel $\sphericalangle FKC$ und $\sphericalangle NKM$ zueinander Scheitelwinkel sind, folgt nach dem Scheitelwinkelsatz $|\sphericalangle NKM| = \alpha$. Hieraus und aus $|\sphericalangle KMN| = \alpha$ folgt $|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle NKM|$.

Schritt 3: Da K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CM}$ ist und L der Mittelpunkt der Strecke $\overline{KM}$, gelten $\left|\overline{CL}\right| = \left|\overline{CK}\right| + \left|\overline{KL}\right|$, $\left|\overline{CK}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{CM}\right|$ und $\left|\overline{KL}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{KM}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{CM}\right|$. Hieraus folgt $\left|\overline{CL}\right| = \frac{3}{4} \cdot \left|\overline{CM}\right|$.

Wegen $|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle NKM|$ ist das Dreieck KNM nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig mit der Basis $\overline{KM}$, weswegen die Seitenhalbierende LN auch Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{KM}$ ist und daher senkrecht auf der Geraden KM steht. Da die Punkte K und M verschiedene Punkte auf der Geraden CD sind, gilt $CD = KM$, womit die Gerade CD senkrecht auf der Geraden LN steht und folglich durch Spiegelung an der Geraden LN auf sich abgebildet wird. Da die Gerade LN durch den Mittelpunkt N des Kreises k_2 verläuft, wird dieser Kreis durch Spiegelung an der Geraden LN auch auf sich abgebildet. Da der Punkt C auf der Geraden CD und dem Kreis k_2 liegt, wird der Punkt C folglich auf den vom Punkt C verschiedenen Punkt auf der Geraden CD und dem Kreis k_2, also auf den Punkt P abgebildet. Folglich ist der Punkt L der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CP}$, weswegen $\left|\overline{CP}\right| = 2 \cdot \left|\overline{CL}\right|$

gilt. Hieraus und aus $\left|\overline{CL}\right| = \frac{3}{4} \cdot \left|\overline{CM}\right|$ folgt $\left|\overline{CP}\right| = \frac{3}{2} \cdot \left|\overline{CM}\right|$. Da die Strecke $\overline{CM}$ ein Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist, ist damit die Behauptung bewiesen.



62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Lösungen – 2. Tag

620944 Lösung *6 Punkte*

Wir bezeichnen die Entfernung zwischen beiden Orten in km mit e, die Geschwindigkeiten in km/h, mit denen sich Rudi und Simon bewegen, mit v_R und v_S, und messen Zeiten in h. Damit können wir in Gleichungen auf Einheiten verzichten.

Das erste Treffen findet statt, wenn sich beide auf dem Hinweg befinden. Rudi hat zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s_R = 3$ zurückgelegt, Simon eine Strecke der Länge $s_S = e-3$. Es gilt also für die bis dahin verflossene Zeit $t_1 = \frac{3}{v_R} = \frac{e-3}{v_S}$ und folglich

$$v_S = \frac{e-3}{3} v_R\,. \tag{1}$$

Beim zweiten Treffen muss Simon schon auf dem Rückweg sein, hat also zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s'_S = e+4$ zurückgelegt. Es gibt die zwei Möglichkeiten, dass Rudi noch auf dem Hinweg ist und von Simon überholt wird, oder dass er sich auf dem Rückweg befindet und Simon ihm ein zweites Mal begegnet.

Fall 1: Rudi ist noch auf dem Hinweg und wird von Simon überholt. Dann gilt für den von Rudi zurückgelegten Weg $s'_R = 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}$. Zusammen mit (1) erhalten wir die Gleichung

$$(e+4)v_R = 4v_S = \frac{4}{3}(e-3)v_R\,,$$

daraus $3(e+4) = 4(e-3)$ und schließlich $e = 24$.

Fall 2: Rudi ist bei der zweiten Begegnung mit Simon ebenfalls bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2e-4$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{2e-4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}$. Zusammen mit (1) erhalten wir die Gleichung

$$(e+4)v_R = (2e-4)v_S = \frac{1}{3}(2e-4)(e-3)v_R\,,$$

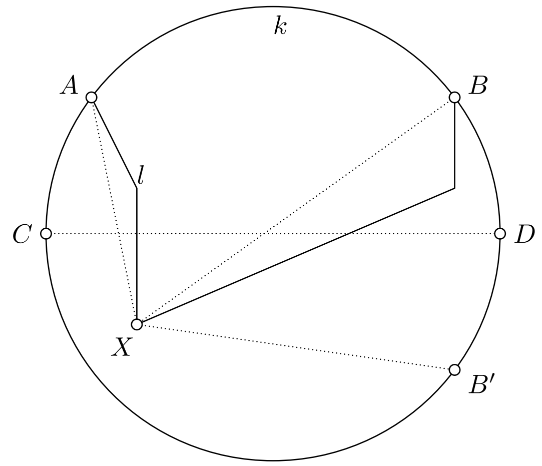
daraus $3(e+4) = (2e-4)(e-3) = 2e^2 - 10e + 12$, weiter $2e^2 - 13e = 0$ und wegen $e > 0$ schließlich $e = 6{,}5$.

Im ersten Fall beträgt die Entfernung zwischen Adorf und Bedorf 24 km und Simons Geschwindigkeit ist $\frac{24-3}{3} = 7$ Mal so hoch wie die von Rudi. (Läuft bspw. Rudi mit 1 km/h und Simon mit 7 km/h, so tritt dieser Fall auch wirklich auf, mit erstem Treffen um 15 Uhr und zweitem Treffen um 16 Uhr.)

Im zweiten Fall beträgt die Entfernung zwischen Adorf und Bedorf 6,5 km und Simons Geschwindigkeit ist $\frac{6{,}5-3}{3} = \frac{7}{6}$ Mal so hoch wie die von Rudi. (Läuft bspw. Rudi mit 3 km/h und Simon mit 3,5 km/h, so tritt dieser Fall auch wirklich auf, mit erstem Treffen um 13 Uhr und zweitem Treffen um 15 Uhr.)

Der Punkt B' liege so auf dem Kreis k, dass die Strecke $\overline{AB'}$ ein Durchmesser von k ist. Weiterhin seien C und D die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{BB'}$ mit dem Kreis k. Dann ist $\overline{CD}$ gleichzeitig ein Durchmesser von k, der k in zwei Halbkreisflächen aufteilt. Die Punkte A und B liegen dann nach Voraussetzung beide auf demselben Halbkreisbogen bezüglich des Durchmessers $\overline{CD}$. Die entsprechende Halbkreisfläche bezeichnen wir mit H_1, die andere Halbkreisfläche mit H_2.

Läge der Streckenzug vollständig in oder auf dem Rand von H_1, würde er den Kreis in zwei Teile teilen, von denen einer mehr als nur H_2 enthielte. Daher kann dies nicht zutreffen und somit gibt es einen Punkt X auf l im Inneren von H_2.



Für die Länge $|l|$ von l folgt nacheinander

$$\begin{aligned} |l| &\geq \left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB}\right| && (1)\\ &> \left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB'}\right| && (2)\\ &\geq \left|\overline{AB'}\right| && (3)\\ &= 2r, && (4) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

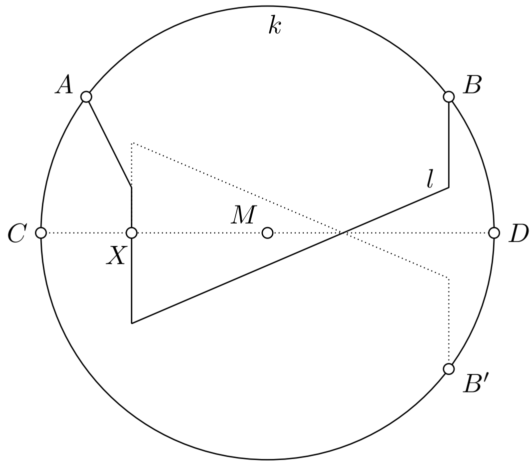
Dabei folgt (1) weil l sich aus zwei Teilen zusammensetzt, von denen einer A mit X verbindet und damit mindestens so lang ist wie die kürzeste Verbindung $\overline{AX}$ von A zu X und der andere X mit B verbindet und damit mindestens so lang ist wie die kürzeste Verbindung $\overline{XB}$ von X zu B. Weiter gilt (2), da X auf derselben Seite der Mittelsenkrechten CD zu $\overline{BB'}$ liegt wie B'.

Weil die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A und B' die Strecke $\overline{AB'}$ ist, folgt (3).

Schließlich ist $\overline{AB'}$ nach Konstruktion von B' Durchmesser von k, weswegen auch (4) gilt.

Anmerkung: Dass die Mittelsenkrechte zu zwei Punkten X und Y die Ebene in zwei Halbebenen teilt, von denen die Halbebene mit X genau alle Punkte P enthält, die dichter an X liegen als an Y, gilt als bekannt, folgt aber mit Dreiecksungleichung, wenn man den Schnittpunkt Z der Mittelsenkrechten mit dem Streckenzug XPY für beliebiges P und das sich ergebende Dreieck XZP betrachtet: $\left|\overline{PY}\right| = \left|\overline{XZ}\right| + \left|\overline{ZP}\right| > \left|\overline{XP}\right|$.

Lösungsvariante: B', H_1 und H_2 werden wie oben eingeführt.



Da der Streckenzug l die Fläche des Kreises in zwei Teile T_1 und T_2 mit gleichen Flächeninhalten zerlegt, muss er wenigstens einen Punkt X mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ gemeinsam haben. Andernfalls verliefe l vollständig innerhalb von H_1 und daher wäre T_1 oder T_2 eine echte Teilmenge von H_1 und hätte einen kleineren Flächeninhalt als H_1. O.B.d.A. sei dies T_1. Dann wäre aber der Flächeninhalt von T_1 kleiner als der von T_2, entgegen der Voraussetzung.

Wir ordnen nun dem Streckenzug l einen gleich langen Streckenzug l' von A nach B' zu, indem wir den Teil, der A mit X verbindet, unverändert lassen und den Teil, der X mit B verbindet, am Durchmesser $\overline{CD}$ spiegeln.

Die Länge von l ist mindestens gleich $\left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB}\right| = \left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB'}\right|$. Mit der Dreiecksungleichung im Dreieck AXB' folgt nun $\left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB'}\right| \geq \left|\overline{AB'}\right| = 2r$. Gleichheit kann nur gelten, wenn X auf $\overline{AB'}$ liegt und l aus genau den Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{XB}$ besteht. X würde in diesem Fall auf den (verschiedenen) Durchmessern $\overline{AB'}$ und $\overline{CD}$ liegen und folglich mit M zusammenfallen. Dann wäre aber T_1 eine echte Teilmenge von H_1 und daher der Flächeninhalt von T_1 kleiner als der von H_1 und somit sicher nicht gleich dem von T_2. Damit kann Gleichheit nicht eintreten und die Länge von l ist größer als $2r$.

<u>620946 Lösung</u> *7 Punkte*

Aus $a^2 + b^2 = 18 < 25 = 5^2$ ergibt sich $0 < a < 5$ und $0 < b < 5$. Die Nenner der Brüche in der Ungleichung

$$\frac{1}{5-a} + \frac{1}{5-b} \geq 1 \tag{1}$$

sind daher positiv. (1) lässt sich somit äquivalent umformen zu $(5-b)+(5-a) \geq (5-a)\cdot(5-b)$ und weiter zu

$$4 \cdot (a+b) \geq ab + 15\,. \tag{2}$$

Erste Lösung: Aus der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $a^2 + b^2 = 18$ folgt $2ab = (a+b)^2 - 18$ für Paare (a, b) mit den angegebenen Eigenschaften und damit

$$2ab - 8(a+b) + 30 = (a+b)^2 - 8(a+b) + 12\,.$$

Ein Vergleich mit (2) zeigt, dass es für den geforderten Beweis der Ungleichung (1) ausreicht, $0 \geq (a+b)^2 - 8(a+b) + 12$ zu zeigen. Bezeichnen wir die Summe $(a+b)$ mit s, dann ist der Ausdruck $s^2 - 8s + 12$ zu untersuchen. Dieser kann faktorisiert werden, denn es gilt $s^2 - 8s + 12 = (s-2) \cdot (s-6)$.

Für Paare (a, b) mit den gegebenen Eigenschaften folgt mit $s^2 = 18 + 2ab \geq 18$ einerseits $s > 4$ und mit $s^2 \leq (a-b)^2 + s^2 = 2a^2 + 2b^2 = 36$ andererseits $s \leq 6$. Daher ist für solche Paare $(s-2) > 0$ und $(s-6) \leq 0$ und schließlich $(s-2) \cdot (s-6) \leq 0$, was $s^2 - 8s + 12 \leq 0$ und damit auch (1) für solche Paare beweist.

Zweite Lösung: Da a und b positiv sind, gilt dies auch für beide Seiten der Ungleichung (2). Quadrieren beider Seiten ist also eine äquivalente Umformung und ergibt

$$16 \cdot \left(a^2 + 2ab + b^2\right) \geq (ab)^2 + 30ab + 225\,.$$

Für Paare (a, b) mit den angegebenen Eigenschaften ist $a^2 + b^2 = 18$. Zum Beweis von (1) für solche Paare reicht es also aus, die Ungleichung

$$63 + 2(ab) - (ab)^2 \geq 0 \tag{3}$$

zu beweisen. Die linke Seite von (3) ist der Funktionsterm einer quadratischen Funktion $q(p) = -p^2 + 2p + 63$ mit Argument $p = ab$. Es ist also zu zeigen, dass deren Funktionswerte für Paare (a, b) mit den angegebenen Eigenschaften nichtnegativ sind.

Die Nullstellen dieser Funktion sind $p_1 = -7$ und $p_2 = 9$, d.h. für $-7 \leq p \leq 9$ sind die Funktionswerte nichtnegativ. Da unter den Voraussetzungen stets $p > 0$ ist, bleibt folglich zu zeigen, dass für Paare (a, b) mit den angegebenen Eigenschaften stets $p \leq 9$ gilt. Wegen $(a-b)^2 \geq 0$ gilt $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. Aus Letzterem folgt aber $9 \geq ab$. Damit ist (3) für Paare (a, b) mit den angegebenen Eigenschaften erfüllt und damit (1) gezeigt.

Dritte Lösung: Die Bedingung $a^2 + b^2 = 18$ ist genauso wie die Ungleichung (1) symmetrisch in a und b. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a \geq b$ gilt (andernfalls vertauschen wir die Bezeichnungen von a und b).

Aus $18 = a^2 + b^2 \leq 2a^2$ folgern wir, dass $a \geq 3$ ist. Aus $a^2 + b^2 = 18$ ergibt sich $b = \sqrt{18 - a^2}$ wegen $b > 0$. Formen wir (2) um zu $b(4-a) \geq 15 - 4a$, so ergibt sich durch Einsetzen die Ungleichung

$$(4-a) \cdot \sqrt{18 - a^2} \geq 15 - 4a\,. \tag{4}$$

Wir zeigen mit einer Fallunterscheidung, dass (4) für alle a mit $3 \leq a < 4$ erfüllt ist. Zusammen mit der Beobachtung, dass (1) auch für alle Paare (a, b) mit den angegebenen Eigenschaften und $a \geq 4$ gilt, ergibt sich dann, dass (1) für alle Paare (a, b) mit den angegebenen Eigenschaften gilt.

Fall 1: $a \geq 4$. In diesem Fall folgt $\frac{1}{5-a} \geq 1$. Da wegen $b < 5$ der Term $\frac{1}{5-b}$ positiv ist, ist (1) für diese Werte von a erfüllt.

Fall 2: $\frac{15}{4} < a < 4$. Die linke Seite von (4) ist offensichtlich positiv, während die rechte Seite negativ ist. Folglich ist in diesem Fall (4) erfüllt.

Fall 3: $3 \leq a \leq \frac{15}{4}$. Dann sind beide Seiten von (4) nichtnegativ. Quadrieren ist also in diesem Fall eine äquivalente Umformung und es bleibt zu zeigen, dass in diesem Fall

$$(4-a)^2 \cdot \left(18 - a^2\right) - (15 - 4a)^2 \geq 0 \tag{5}$$

gilt. Ausmultiplizieren und Umformen führt zu

$$(4-a)^2 \cdot \left(18 - a^2\right) - (15 - 4a)^2 = -a^4 + 8a^3 - 14a^2 - 24a + 63\,.$$

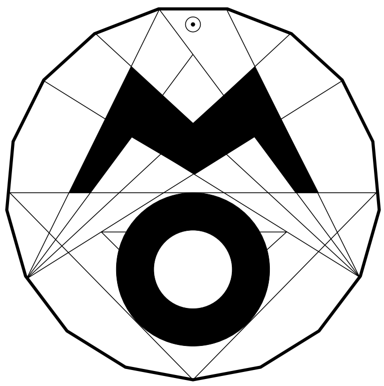
Dies ist der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vierten Grades. Er wird null für $a = 3$. Z.B. durch Polynomdivision findet man die Faktorisierung $a^4 - 8a^3 + 14a^2 + 24a - 63 = (a-3)^2 \cdot (a^2 - 2a - 7)$, d.h. es bleibt

$$0 \geq (a-3)^2 \cdot \big(a^2 - 2a - 7\big) \tag{6}$$

zu zeigen.
Offensichtlich ist $(a-3)^2 \geq 0$ und es ist $a^2 - 2a - 7 = (a-1)^2 - 8$. Der Graph der Funktion $f(a) = (a-1)^2 - 8$ ist eine nach oben offene Parabel mit Scheitel bei $a = 1$. Den größten Wert nimmt $f(a)$ im betrachteten Intervall also an der Stelle $a = \frac{15}{4}$ an. Nun gilt aber

$$f\left(\frac{15}{4}\right) = \left(\frac{11}{4}\right)^2 - 8 = -\frac{7}{16}.$$

Folglich gilt im betrachteten Intervall $0 > a^2 - 2a - 7$ und die Ungleichung (6) wird in diesem Bereich erfüllt.



62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Lösungen – 2. Tag

621044 Lösung *6 Punkte*

Wir bezeichnen die Entfernung zwischen beiden Orten in km mit e, die Geschwindigkeiten in km/h, mit denen sich Rudi und Simon bewegen, mit v_R und v_S, und messen Zeiten in h. Damit können wir in Gleichungen auf Einheiten verzichten.

Das erste Treffen findet statt, wenn sich beide auf dem Hinweg befinden. Rudi hat zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s_R = 3$ zurückgelegt, Simon eine Strecke der Länge $s_S = e-3$. Es gilt also für die bis dahin verflossene Zeit $t_1 = \frac{3}{v_R} = \frac{e-3}{v_S}$ und folglich

$$v_S = \frac{e-3}{3} v_R\,. \tag{1}$$

Von der Grillhütte wissen wir nicht, ob sie 4 km oder 2 km von Adorf entfernt ist. Wenn die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt ist, könnten sich Rudi und Simon dort begegnen, wenn beide auf dem Rückweg sind; es wäre aber auch möglich, dass Rudi noch auf dem Hinweg ist und dort von Simon, der bereits auf dem Rückweg ist, überholt wird. Wenn die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt ist, können sich Rudi und Simon dort begegnen, wenn beide auf dem Rückweg sind; es könnte aber auch sein, dass Rudi bereits auf dem Rückweg ist und Simon dort überholt, der noch auf dem Hinweg ist.

Fall 1: Die Grillhütte ist 4 km von Adorf entfernt, Rudi ist noch auf dem Hinweg und wird von Simon überholt. Dann gilt für den von Rudi zurückgelegten Weg $s'_R = 4$, für den von Simon zurückgelegten Weg $s'_S = e+4$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}$. Zusammen mit (1) erhalten wir die Gleichung

$$(e+4)v_R = 4v_S = \frac{4}{3}(e-3)v_R\,,$$

daraus $3(e+4) = 4(e-3)$ und schließlich $e = 24$.

Fall 2: Die Grillhütte ist 4 km von Adorf entfernt, Rudi ist bei der zweiten Begegnung mit Simon ebenfalls bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2e-4$, $s'_S = e+4$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{2e-4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}$. Zusammen mit (1) erhalten wir die Gleichung

$$(e+4)v_R = (2e-4)v_S = \frac{1}{3}(2e-4)(e-3)v_R\,,$$

daraus $3(e+4) = (2e-4)(e-3) = 2e^2-10e+12$, weiter $2e^2-13e = 0$ und wegen $e > 0$ schließlich $e = 6{,}5$.

Fall 3: Die Grillhütte ist 2 km von Adorf entfernt, Rudi und Simon sind bei der zweiten Begegnung beide bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2e-2$, $s'_S = e+2$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{2e-2}{v_R} = \frac{e+2}{v_S}$. Zusammen mit (1) erhalten wir die Gleichung

$$(e+2)v_R = (2e-2)v_S = \frac{1}{3}(2e-2)(e-3)v_R\,,$$

daraus $3(e+2) = (2e-2)(e-3) = 2e^2 - 8e + 6$, weiter $2e^2 - 11e = 0$ und wegen $e > 0$ schließlich $e = 5{,}5$.

Fall 4: Die Grillhütte ist 2 km von Adorf entfernt, Rudi überholt bei der zweiten Begegnung auf seinem Rückweg Simon, der noch auf dem Hinweg ist. Dann gilt $s'_R = 2e - 2$, $s'_S = e - 2$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{2e-2}{v_R} = \frac{e-2}{v_S}$. Zusammen mit (1) erhalten wir die Gleichung

$$(e-2)v_R = (2e-2)v_S = \frac{1}{3}(2e-2)(e-3)v_R\,,$$

daraus $3(e-2) = (2e-2)(e-3) = 2e^2 - 8e + 6$, weiter $2e^2 - 11e + 12 = (e-4)(2e-3) = 0$ und wegen $e > 3$ (die alte Eiche liegt zwischen Adorf und Bedorf) schließlich $e = 4$.

Es gibt also vier Möglichkeiten für die Entfernung, nämlich 24 km oder 6,5 km oder 5,5 km oder 4 km.

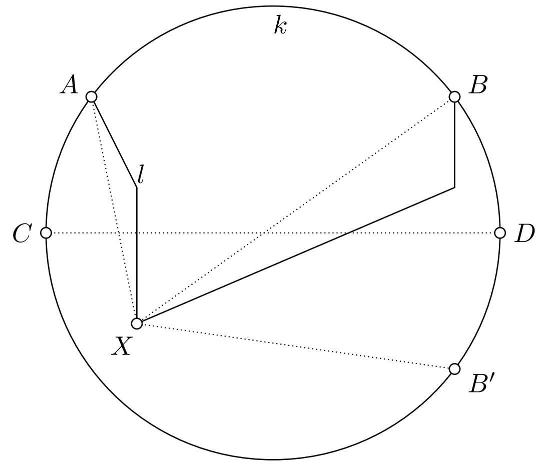
Alle Fälle können auch wirklich auftreten:

- Beträgt die Entfernung 24 km, liegt die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt, und laufen Rudi mit 1 km/h und Simon mit 7 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 15 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 16 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 6,5 km, liegt die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt, und laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 3,5 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 15 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 5,5 km, liegt die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt, und laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 2,5 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 15 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 4 km, liegt die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt, und laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 1 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 14 Uhr.

621045 Lösung *7 Punkte*

Der Punkt B' liege so auf dem Kreis k, dass die Strecke $\overline{AB'}$ ein Durchmesser von k ist. Weiterhin seien C und D die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{BB'}$ mit dem Kreis k. Dann ist $\overline{CD}$ gleichzeitig ein Durchmesser von k, der k in zwei Halbkreisflächen aufteilt. Die Punkte A und B liegen dann nach Voraussetzung beide auf demselben Halbkreisbogen bezüglich des Durchmessers $\overline{CD}$. Die entsprechende Halbkreisfläche bezeichnen wir mit H_1, die andere Halbkreisfläche mit H_2.

Läge der Streckenzug vollständig in oder auf dem Rand von H_1, würde er den Kreis in zwei Teile teilen, von denen einer mehr als nur H_2 enthielte. Daher kann dies nicht zutreffen und somit gibt es einen Punkt X auf l im Inneren von H_2.



Für die Länge $|l|$ von l folgt nacheinander

$$\begin{aligned} |l| &\geq \left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB}\right| && (1)\\ &> \left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB'}\right| && (2)\\ &\geq \left|\overline{AB'}\right| && (3)\\ &= 2r, && (4) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

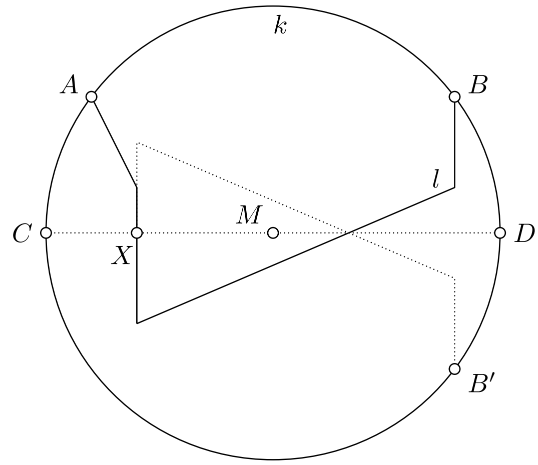
Dabei folgt (1) weil l sich aus zwei Teilen zusammensetzt, von denen einer A mit X verbindet und damit mindestens so lang ist wie die kürzeste Verbindung $\overline{AX}$ von A zu X und der andere X mit B verbindet und damit mindestens so lang ist wie die kürzeste Verbindung $\overline{XB}$ von X zu B. Weiter gilt (2), da X auf derselben Seite der Mittelsenkrechten CD zu $\overline{BB'}$ liegt wie B'.

Weil die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A und B' die Strecke $\overline{AB'}$ ist, folgt (3).

Schließlich ist $\overline{AB'}$ nach Konstruktion von B' Durchmesser von k, weswegen auch (4) gilt.

Anmerkung: Dass die Mittelsenkrechte zu zwei Punkten X und Y die Ebene in zwei Halbebenen teilt, von denen die Halbebene mit X genau alle Punkte P enthält, die dichter an X liegen als an Y, gilt als bekannt, folgt aber mit Dreiecksungleichung, wenn man den Schnittpunkt Z der Mittelsenkrechten mit dem Streckenzug XPY für beliebiges P und das sich ergebende Dreieck XZP betrachtet: $\left|\overline{PY}\right| = \left|\overline{XZ}\right| + \left|\overline{ZP}\right| > \left|\overline{XP}\right|$.

Lösungsvariante: B', H_1 und H_2 werden wie oben eingeführt.



Da der Streckenzug l die Fläche des Kreises in zwei Teile T_1 und T_2 mit gleichen Flächeninhalten zerlegt, muss er wenigstens einen Punkt X mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ gemeinsam haben. Andernfalls verliefe l vollständig innerhalb von H_1 und daher wäre T_1 oder T_2 eine echte Teilmenge von H_1 und hätte einen kleineren Flächeninhalt als H_1. O.B.d.A. sei dies T_1. Dann wäre aber der Flächeninhalt von T_1 kleiner als der von T_2, entgegen der Voraussetzung.

Wir ordnen nun dem Streckenzug l einen gleich langen Streckenzug l' von A nach B' zu, indem wir den Teil, der A mit X verbindet, unverändert lassen und den Teil, der X mit B verbindet, am Durchmesser $\overline{CD}$ spiegeln.

Die Länge von l ist mindestens gleich $\left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB}\right| = \left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB'}\right|$. Mit der Dreiecksungleichung im Dreieck AXB' folgt nun $\left|\overline{AX}\right| + \left|\overline{XB'}\right| \geq \left|\overline{AB'}\right| = 2r$. Gleichheit kann nur gelten, wenn X auf $\overline{AB'}$ liegt und l aus genau den Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{XB}$ besteht. X würde in diesem Fall auf den (verschiedenen) Durchmessern $\overline{AB'}$ und $\overline{CD}$ liegen und folglich mit M zusammenfallen. Dann wäre aber T_1 eine echte Teilmenge von H_1 und daher der Flächeninhalt von T_1 kleiner als der von H_1 und somit sicher nicht gleich dem von T_2. Damit kann Gleichheit nicht eintreten und die Länge von l ist größer als $2r$.

621046 Lösung *7 Punkte*

Wir bezeichnen mit

$$L = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, a^2 + 2b^2 = 3n\right\}$$

die Menge aller *ganzzahligen* Lösungen der Gleichung

$$a^2 + 2b^2 = 3n \tag{1}$$

und mit

$$L_+ = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, a^2 + 2b^2 = 3n,\ a,b > 0\right\}$$

die Menge der Lösungen von (1) in positiven ganzen Zahlen, wobei n wie in der Aufgabenstellung eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl ist. Wegen $|a|, |b| < \sqrt{3n}$ sind die Mengen L und L_+ endlich.

In jedem Paar $(a,b) \in L$ ist keine der beiden Zahlen durch 3 teilbar. In der Tat, wäre etwa a durch 3 teilbar, so müsste es auch b sein. Dann wäre aber $a^2 + 2b^2 = 3n$ durch 9 teilbar im Widerspruch zur Voraussetzung an n.

Zunächst sei die *grundsätzliche heuristische Vorgehensweise* erläutert, der wir folgen wollen, um den geforderten Beweis zu erbringen. Wir untersuchen, ob Lösungen $s \in L$ „normalerweise" in Paaren vorkommen, indem wir nach einer zu sich selbst inversen Abbildung $f : L \to L$ (einer *Involution*) suchen, also einer Abbildung, die $s = (a, b) \in L$ auf $s' = f(s) = (a', b') \in L$ und s' auf $f(s') = s$ abbildet. Die Zuordnung $s \leftrightarrow s'$ induziert dann eine Paarbildung, wenn $s \neq s'$ gilt. Ist $s = s'$ möglich, so gibt es in L auch gewisse bzgl. f „singuläre" Elemente.

Um eine solche Involution f zu finden, setzen wir $a' = u_1 a + u_2 b$, $b' = v_1 a + v_2 b$ mit unbestimmten Koeffizienten u_1, u_2, v_1, v_2 und leiten (hinreichende – wir wollen nicht alle denkbaren Involutionen, sondern nur eine für unsere Zwecke geeignete finden) Bedingungen für diese Koeffizienten ab.

Damit f eine Involution ist, muss

$$\begin{aligned} & a'' = u_1 a' + u_2 b' = u_1 (u_1 a + u_2 b) + u_2 (v_1 a + v_2 b) = a \\ \text{und} \quad & b'' = v_1 a' + v_2 b' = v_1 (u_1 a + u_2 b) + v_2 (v_1 a + v_2 b) = b \end{aligned}$$

gelten. Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$u_1^2 + u_2 v_1 = 1,\ u_2 (u_1 + v_2) = 0,\ v_1 (u_1 + v_2) = 0,\ v_2^2 + u_2 v_1 = 1\,,$$

die für $v_2 = -u_1$ und $u_1^2 + u_2 v_1 = 1$ erfüllt sind.

Damit $s' = f(s) \in L$ für $s \in L$ erfüllt ist, muss

$$\begin{aligned} 3n &= a^2 + 2b^2 = a'^2 + 2b'^2 = (u_1 a + u_2 b)^2 + 2 (v_1 a + v_2 b)^2 \\ &= \left(u_1^2 + 2v_1^2\right) a^2 + (2u_1 u_2 + 4v_1 v_2)\, ab + \left(u_2^2 + 2v_2^2\right) b^2 \end{aligned}$$

gelten, was für $u_1^2 + 2v_1^2 = 1$, $u_2 - 2v_1 = 0$, $u_2^2 + 2u_1^2 = 2$ erfüllt ist, wobei in den letzten beiden Beziehungen $v_2 = -u_1$ verwendet wurde. Setzen wir $u_1 = -v_2 = u$, $v_1 = v$ und damit $u_2 = 2v_1 = 2v$, so sind die linearen Transformationen

$$a' = u \cdot a + 2v \cdot b,\ b' = v \cdot a - u \cdot b$$

mit rationalen u, v, die $u^2 + 2v^2 = 1$ erfüllen, gute Kandidaten für eine Involution f mit den oben beschriebenen Eigenschaften.

Eine rationale Lösung der Gleichung $u^2 + 2v^2 = 1$ ist $\left(u = \frac{1}{3}, v = \frac{2}{3}\right)$. Diese Lösung führt auf die Involution

$$f(a, b) = \left(a' = \frac{a + 4b}{3}, b' = \frac{2a - b}{3}\right) . \tag{2}$$

Damit die Involution für unsere Zwecke verwendet werden kann, müssen a' und b' noch ganzzahlig sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $a + 4b$ und $2a - b$ durch 3 teilbar sind, also im Fall $a + 4b \equiv a + b \equiv 0 \pmod 3$.

Das ist in der „Hälfte" der Fälle so, denn zwei nicht durch 3 teilbare Zahlen a und b lassen bei Division durch 3

- entweder denselben Rest, dann ist $a - b \equiv 0 \pmod 3$,
- oder verschiedene Reste, dann ist $a + b \equiv 0 \pmod 3$.

Wir fassen das Ergebnis der bisherigen Untersuchungen zusammen: Auf der Menge

$$L_1 = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, a^2 + 2b^2 = 3n,\ a + b \equiv 0 \pmod 3\right\}$$

ist die in (2) beschriebene Abbildung eine Involution, also eine Abbildung, wo für $s = (a, b) \in L_1$ stets $s' = f(s) \in L_1$ und $s'' = f(s') = s$ gilt. Wegen

$$a' + b' = \frac{a + 4b}{3} + \frac{2a - b}{3} = a + b \equiv 0 \pmod 3$$

ist in der Tat mit $s \in L_1$ auch $s' \in L_1$.

Nun zum eigentlichen Beweis: Wir betrachten weiter die Abbildung $p : L \to L_+$, die durch $p(a, b) = (|a|, |b|)$ gegeben ist. Dieses p ist eine surjektive Abbildung, denn jedes $s = (a, b) \in L_+$ hat genau die vier Urbilder $(\pm a, \pm b) \in L$, von denen genau zwei in L_1 liegen: Für $a + b \equiv 0 \pmod 3$ sind dies (a, b) und $(-a, -b)$, für $a - b \equiv 0 \pmod 3$ sind dies $(a, -b)$ und $(-a, b)$.

$g : L_+ \to L_+$ sei nun wie folgt definiert: Für $s = (a, b) \in L_+$ nehmen wir eines der beiden Urbilder $\hat{s} = (\hat{a}, \hat{b}) \in L_1$ und setzen $g(s) = p(f(\hat{s}))$. Diese Definition ist von der Wahl des Urbilds $\hat{s}$ unabhängig, denn neben $\hat{s}$ ist $-\hat{s}$ das zweite Urbild, wegen (2) gilt aber $f(-\hat{s}) = -f(\hat{s})$ und folglich $p(f(\hat{s})) = p(f(-\hat{s}))$. Hierbei wurde die Notation $-(a, b) = (-a, -b)$ verwendet.

g ist also eine Involution auf ganz L_+, denn für $s = p(\hat{s}) \in L_+$ ist $s' = g(s) = p(\hat{s}')$ und da f eine Involution auf L ist, folgt $s'' = g(s') = p(\hat{s}'') = p(\hat{s})$, wobei wir kurz $\hat{s}' = f(\hat{s})$ und $\hat{s}'' = f(\hat{s}')$ geschrieben haben.

Die Elemente $s \in L_+$ können also für alle s mit $s \neq s'$ zu Paaren (s, s') zusammengefasst werden. Ist das stets der Fall, ist die Zahl der Elemente in L_+ gerade. Es bleibt also zu untersuchen, unter welchen Bedingungen es $s = (a, b) \in L_+$ mit $s' = s$ gibt.

Wir untersuchen die beiden Fälle $a + b \equiv 0 \pmod 3$ und $a - b \equiv 0 \pmod 3$ getrennt.

Fall 1: $a + b \equiv 0 \pmod 3$. Wir können $\hat{s} = (a, b)$ nehmen, und mit (2) ergibt sich

$$s' = \left(\frac{a + 4b}{3}, \left| \frac{2a - b}{3} \right| \right).$$

Wegen $a, b > 0$ ist im ersten Argument der Betrag weggelassen. $s = s'$ gilt also genau dann, wenn

$$a = \frac{a + 4b}{3}, \; b = \left| \frac{2a - b}{3} \right|$$

erfüllt ist, also $a = 2b$, $b = |b|$ gilt. Die zweite Bedingung ist wegen $b > 0$ stets erfüllt. Weiter muss $(a, b) \in L_+$ gelten, also $3n = a^2 + 2b^2 = 6b^2$ sein.
Hat n *nicht* die Gestalt $n = 2m^2$ mit ganzzahligem m, so gibt es keine Lösungen und damit auch keine $s \in L_+$ mit $a + b \equiv 0 \pmod 3$ und $s = s'$. Gilt $n = 2m^2$, so gibt es höchstens ein solches $s \in L_+$, und zwar $s = (2m, m)$. Die Probe zeigt $s \in L_+$, es gibt also in diesem Fall *genau* ein $s \in L_+$ mit $a + b \equiv 0 \pmod 3$ und $s = s'$.

Fall 2: $a - b \equiv 0 \pmod 3$. Wir können $\hat{s} = (a, -b)$ nehmen, und mit (2) ergibt sich

$$s' = \left(\left| \frac{a - 4b}{3} \right|, \frac{2a + b}{3} \right),$$

wobei wegen $a, b > 0$ im zweiten Argument der Betrag weggelassen ist. $s = s'$ gilt also genau dann, wenn

$$a = \left| \frac{a - 4b}{3} \right|, \; b = \frac{2a + b}{3}$$

erfüllt ist, also $a = b$, $a = |-b|$ gilt. Die zweite Bedingung ist für $a = b$ automatisch erfüllt. Weiter muss $(a, b) \in L_+$ gelten, also $3n = a^2 + 2b^2 = 3b^2$ sein.

Hat n *nicht* die Gestalt $n = m^2$ mit ganzzahligem m, so gibt es keine Lösungen und damit auch keine $s \in L_+$ mit $a - b \equiv 0 \pmod 3$ und $s = s'$. Gilt $n = m^2$, so gibt es höchstens ein solches $s \in L_+$, und zwar $s = (m, m)$. Die Probe zeigt $s \in L_+$, es gibt also auch in diesem Fall *genau* ein $s \in L_+$ mit $a - b \equiv 0 \pmod 3$ und $s = s'$.

Wir haben damit gezeigt, dass

- für $n = m^2$ genau eine Lösung $s \in L_+$ mit $s = s'$ und $a - b \equiv 0 \pmod 3$ und keine solche mit $a + b \equiv 0 \pmod 3$ existiert,
- für $n = 2m^2$ genau eine Lösung $s \in L_+$ mit $s = s'$ und $a + b \equiv 0 \pmod 3$ und keine solche mit $a - b \equiv 0 \pmod 3$ existiert und
- in allen anderen Fällen überhaupt keine Lösung $s \in L_+$ mit $s = s'$ existiert.

Da die Fälle „n ist Quadratzahl“ und „n ist das Doppelte einer Quadratzahl“ disjunkt sind, ist damit die Behauptung der Aufgabenstellung bewiesen.

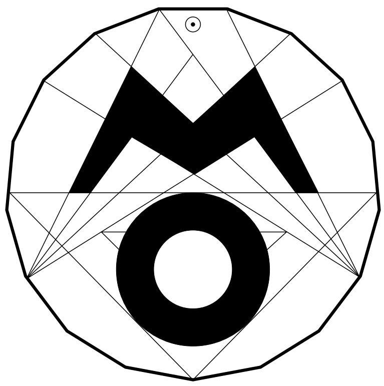
Anmerkung: Die grundsätzliche heuristische Vorgehensweise ist nicht als Teil einer vollständigen Lösung zu erwarten.

Für eine vollständige Lösung reicht es, f wie in (2) zu definieren und die danach zusammengefassten Eigenschaften zu zeigen (was einfach ist); die Angabe, wie man auf so ein f kommt, ist nicht notwendig (und würde sich im Zweifel partiell auf einem Schmierblatt wiederfinden).

Die Fachbegriffe werden in der Musterlösung lediglich verwendet, um eine Verbindung der benutzten Ideen zur weiterführenden Literatur zu schaffen. Die hier genutzte Art der Paarbildung, um gerade Anzahlen von ungeraden zu unterscheiden, ist eben eine so oft hilfreiche Heuristik, dass die verwendete Sorte von Funktionen sogar einen eigenen Namen bekommen hat. Es ist nicht nötig, diese Fachbegriffe zu kennen oder zu verwenden.

Die grundsätzliche heuristische Vorgehensweise für sich genommen ist aber durchaus ein wesentlicher Schritt hin zur Lösung der Aufgabe und das Verfolgen des dort geschilderten Ansatzes ist durchaus bei nicht gelungenem Beweis Teilpunkte wert, selbst wenn in der Abgabe nur relevante Teile dieses heuristischen Vorgehens geschildert sind.

Hat man den Beweis also nicht gefunden, ist es durchaus sinnvoll, kluge Ideen zum Finden eines Beweises auf die Reinschrift zu übertragen, die man bei gefundenem Beweis dort nicht mehr benötigt.



Olympiadeklasse **11**

62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Lösungen – 2. Tag

621144 Lösung *6 Punkte*

Erste Lösung: Es sei (a, b, c) ein Tripel ganzer Zahlen, das die gegebenen Gleichungen erfüllt. Genau dann ist auch das zyklische System von drei Gleichungen

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c}\,, \qquad b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}\,, \qquad c + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{b}$$

erfüllt, das wir äquivalent umformen. Die Brüche fassen wir dabei zusammen:

$$a - b = 4 \cdot \frac{b-c}{bc}\,, \qquad b - c = 4 \cdot \frac{c-a}{ca}\,, \qquad c - a = 4 \cdot \frac{a-b}{ab}\,. \tag{1}$$

Gilt $a = b$, so folgt daraus $a = b = c$. Die Probe für $(a, b, c) = (n, n, n)$ zeigt, dass dies für beliebige ganze Zahlen $n \neq 0$ eine Lösung darstellt.

Für den Alternativfall $a \neq b$ folgt aus (1) zuerst $b \neq c$ und dann $c \neq a$. Das Produkt der drei Gleichungen dividiert durch $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ ergibt $1 = 4^3/(abc)^2$, also

$$abc = \pm 2^3 = \pm 8\,.$$

Die Teiler von 8 sind die Zahlen ± 1, ± 2, ± 4 und ± 8. Da die Aufgabenstellung bei zyklischer Vertauschung der Variablen in sich selbst übergeht, können wir annehmen, dass a den kleinsten Betrag der drei Variablen hat: $|a| \leq \sqrt[3]{8} = 2$. Gilt $a = \pm 2$, so muss auch $b = \pm 2$ und $c = \pm 2$ gelten. Unter diesen drei Zahlen müssen zwei das gleiche Vorzeichen haben, also gleich sein. Da das in diesem Fall ausgeschlossen ist, muss $a = \pm 1$ gelten.

Wir diskutieren den Fall $a = 1$. Dann ist $bc = \pm 8$, also $bc = 8v$ mit $v = +1$ oder $v = -1$, und die Gleichungen (1) lauten

$$1 - b = \frac{v}{2} \cdot (b - c)\,, \qquad b - c = \frac{4}{c} \cdot (c - 1)\,, \qquad c - 1 = \frac{4}{b} \cdot (1 - b)\,. \tag{2}$$

Aus der ersten Gleichung von (2) folgt, dass $b - c$ gerade sein muss. Damit entfallen für die ganzzahlige Zerlegung $\pm 8 = b \cdot c$ die Möglichkeiten $(\pm 1) \cdot (\pm 8)$ und $(\pm 8) \cdot (\pm 1)$. Ein Faktor muss ± 2, der andere ± 4 sein. Die linke Seite der zweiten Gleichung ist gerade, $c - 1$ aber ungerade, also muss $4/c$ den Faktor 2 enthalten. Das erzwingt $c = \pm 2$, und es bleibt $b = \pm 4$. Schließlich folgt aus der dritten Gleichung $|c - 1| = |b - 1|$, was nur $c = -2$ und $b = +4$ mit $v = -1$ übrig lässt. Eine Probe bestätigt diese Lösung.

Für $a = 1 \neq b$ gibt es also genau eine Lösung, $(a, b, c) = (1, 4, -2)$.

Wie man direkt überprüfen kann, ergibt sich aus einer Lösung (a, b, c) der Aufgabe immer auch eine Lösung $(-a, -b, -c)$. Im Fall $a = -1$ ist also jede Lösung $(-1, b, c)$ zu $(1, -b, -c)$ gespiegelt. Wie gezeigt, muss dann $-b = 4$ und $-c = -2$ gelten.

Für $a = -1 \neq b$ gibt es also genau die eine Lösung $(a, b, c) = (-1, -4, 2)$.

Beachten wir noch die möglichen zyklischen Vertauschungen, so erhalten wir die restlichen Lösungen. Zusammengefasst gibt es also genau die Lösungen

$$(1,4,-2)\,,\quad (-1,-4,2)\,,\quad (-2,1,4)\,,\quad (2,-1,-4)\,,\quad (4,-2,1)\,,\quad (-4,2,-1)\,,$$
$$\text{sowie}\quad (n,n,n) \quad \text{mit einem beliebigen Wert} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,.$$

Zweite Lösung: Es sei (a, b, c) ein Tripel ganzer Zahlen, das die gegebenen Gleichungen erfüllt. Da die Gleichungen Kehrwerte der drei gesuchten Zahlen enthalten, müssen diese von Null verschieden sein.

Nach dem Schubfachprinzip gibt es unter den ganzen Zahlen a, b und c zwei, die die gleiche Parität besitzen. Da zyklische Vertauschung der Variablenbezeichnungen die Gleichungen erhält, nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit an, dass a und b die gleiche Parität besitzen. Somit gilt $a - b = 2k$ mit einer ganzen Zahl k.

Wenn wir bei allen drei Variablen einer Lösung das Vorzeichen wechseln, erhalten wir offensichtlich ebenfalls eine Lösung. Deshalb nehmen wir zusätzlich, wieder ohne die Allgemeingültigkeit einzuschränken, an, dass $a \geq b$ gilt. Die Zahl $m = c - a$ ist ebenfalls ganz.

Die Übereinstimmung des ersten Terms der Aufgabe mit dem zweiten und dritten lässt sich dann schreiben als

$$k = \frac{a-b}{2} = \frac{2}{c} - \frac{2}{b} \geq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad m = c - a = \frac{4}{b} - \frac{4}{a} = \frac{4(a-b)}{ab} = \frac{8k}{ab}\,.$$

Unter den getroffenen zusätzlichen Annahmen ist die Aufgabe äquivalent dazu, alle Quintupel ganzer Zahlen (a, b, c, k, m) mit $abc \neq 0$ und $k \geq 0$ zu finden, für die die vier Gleichungen

$$k = \frac{2}{c} - \frac{2}{b}\,, \qquad a = b + 2k\,, \qquad m = c - a \qquad \text{und} \qquad mab = 8k \tag{3}$$

erfüllt sind. Vertauscht man dann die Zahlen (a, b, c) noch zyklisch oder wechselt alle fünf Vorzeichen, erhält man alle Lösungen der Aufgabe.

Wegen

$$0 \leq \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \leq \left|\frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

reicht es, die folgenden Fälle mit $0 \leq k \leq 4$ zu betrachten.

Fall 1: $k = 0$. Dann gilt $a = b$ und $2/c - 2/b = 0$, also $c = b$. Es folgt $m = 0$. Alle Gleichungen in (3) sind erfüllt. Die ganzzahligen Tripel mit $a = b = c \neq 0$ lösen die Aufgabe.

Fall 2: $k = 1$. Die erste Bedingung in (3), $2/c - 2/b = 1$, ist wegen $bc \neq 0$ äquivalent zu $(2 - c)(b + 2) = 4$. Wir untersuchen alle Zerlegungen der 4 in ganzzahlige Faktoren, berechnen nach (3) die Werte der Variablen und beachten dabei die Zerlegung $8 = mab$ in drei ganzzahlige Faktoren.

$2-c$	$a=b+2$	b	$b \mid 8$?	c	$m=c-a$	$m \mid 8$?
-4	-1	-3	nein			
-2	-2	-4	ja	4	6	nein
-1	-4	-6	nein			
1	4	2	ja	1	-3	nein
2	2	0	nein			
4	1	-1	ja	-2	-3	nein

In diesem Fall gibt es also keine Lösungen.

Fall 3: $k = 2$. Hier ist $2/c - 2/b = 2$ äquivalent zu $(1-c)(b+1) = 1$. Wegen $b \neq 0$ liefert $b = -2$ den einzig möglichen ganzen Teiler $b+1 = -1$ von 1. Es müssen $1 - c = -1$ und $a = b + 4$, also $c = a = 2$ gelten. Dann ist $m = c - a = 0$ aber kein Teiler von $8k = 16$. Auch für $k = 2$ existieren also keine Lösungen.

Fall 4: $k = 3$. Die Bedingung $2/c - 2/b = 3$ gilt genau dann, wenn $(3b+2)(1-c) = b+2$ ist. Für $b = -2$ folgt $c = 1$ und $a = b + 6 = 4$. Es ergibt sich $m = c - a = -3$. Die letzte Bedingung $24 = mab = (-3) \cdot 4 \cdot (-2)$ ist erfüllt. Wir erhalten die Lösung $(4, -2, 1)$.
Für $b \neq -2$ muss $3b + 2$ ein Teiler von $b + 2$ sein. Dafür ist $|3b+2| \leq |b+2|$, also $(3b+2)^2 \leq (b+2)^2$ oder $8b(b+1) \leq 0$ nötig. Wegen $b \neq 0$ gilt das nur für $b = -1$. Das ergibt aber $a = b + 6 = 5$, keinen Teiler von $8k = 24$.
Im Fall 4 gibt es also genau ein Lösungstripel, nämlich $(4, -2, 1)$.

Fall 5: $k = 4$. In diesem Fall formen wir $2/c - 2/b = 4$ zu $(1-2c)(1+2b) = 1$ um. Die Zerlegung $1 = 1 \cdot 1$ liefert dann $b = c = 0$, also keine Lösung, während $1 = (-1) \cdot (-1)$ den Wert $b = -1$ und damit $a = b + 8 = 7$ liefert, was ebenfalls kein Teiler von $8k = 32$ ist.

Außer dem für $a > b$ einzig gefundenen Lösungstripel $(4, -2, 1)$ sind noch das entgegengesetzte Tripel $(-4, 2, -1)$ mit umgekehrten Vorzeichen sowie in beiden Fällen die Tripel mit zyklisch vertauschten Werten zu berücksichtigen.

Zusammengefasst gibt es also genau die Lösungen (n, n, n) mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sowie die Lösungen

$$(4,-2,1),\ (-4,2,-1),\ (1,4,-2),\ (-1,-4,2),\ (-2,1,4),\ (2,-1,-4)\,.$$

Dritte Lösung: Wir nehmen wieder an, dass (a, b, c) eine Lösung ist, und setzen

$$s = a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}\,.$$

Offensichtlich liegen a, b und c im Definitionsbereich der für $x \neq s$ definierten Funktion

$$f(x) = \frac{4}{s-x}\,,$$

und die gegebenen Gleichungen können in der Form

$$b = f(a)\,, \qquad c = f(b)\,, \qquad a = f(c) \tag{4}$$

geschrieben werden. Folglich gilt

$$a = f(f(f(a)))\,,$$

es ist also a ein Fixpunkt der dritten Iterierten f^3 von f. Gleiches gilt für b und c. Einfache Umformungen führen auf

$$a = f(f(f(a))) = \cfrac{4}{s - \cfrac{4}{s - \cfrac{4}{s-a}}} = \frac{4s^2 - 4as - 16}{s^3 - as^2 - 8s + 4a}\,,$$

und somit gilt

$$as^3 - a^2s^2 - 8as + 4a^2 = 4s^2 - 4as - 16\,,$$

also

$$0 = (-s^2+4)a^2 + (s^3 - 4s)a - 4s^2 + 16 = (s^2-4)(-a^2 + as - 4)\,.$$

Fall 1: $s^2 \neq 4$. Dann ist $a^2 - as + 4 = 0$. Also gilt $a \neq s$ und $f(a) = 4/(s-a) = a$. Aus (4) folgt zunächst $b = f(a) = a$ und danach $c = f(b) = f(a) = a$, also stimmen alle Variablen überein. Dies führt auf $a = b = c = n$ mit ganzzahligem n. Die Probe bestätigt diese Lösung für alle $n \neq 0$.

Fall 2: $s^2 = 4$. In diesem Fall gilt

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a} = s = \pm 2\,.$$

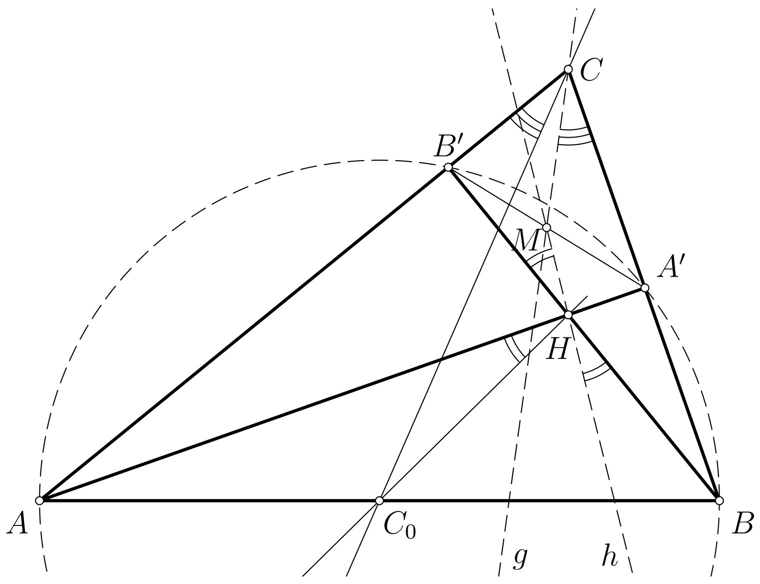
Wegen der Ganzzahligkeit kommt für a (und ebenso für b und c) nur eine der sechs Zahlen $-4, -2 - 1, 1, 2, 4$ in Betracht. Einsetzen in (4) liefert für jede Wahl von a und $s \in \{-2, 2\}$ entweder keine ganze Zahl oder den nächsten Wert eines der in den ersten Lösungsvarianten angegebenen Tripel.

a	-4	-2	-1	1	2	4
$b = f(a)$ $(s = 2)$	$2/3$	1	$4/3$	4	n. def.	-2
$b = f(a)$ $(s = -2)$	2	n. def.	-4	$-4/3$	-1	$-4/3$

Ergebnis: Es gibt genau die Lösungen (n, n, n) mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sowie die Lösungen

$$(4, -2, 1),\ (-4, 2, -1),\ (1, 4, -2),\ (-1, -4, 2),\ (-2, 1, 4),\ (2, -1, -4)\,.$$

621145 Lösung *7 Punkte*



L 621145

Es wird nachgewiesen, dass sowohl g als auch h durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{A'B'}$ gehen.

Wegen $|\sphericalangle AB'B| = |\sphericalangle AA'B| = 90°$ ist nach der Umkehrung des Satzes des Thales $\square\, ABA'B'$ ein Sehnenviereck. Folglich sind $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CA'B'|$ und $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle A'B'C|$, d. h. die beiden Dreiecke CAB und $CB'A'$ sind zueinander gegenorientiert ähnlich. Da C_0 und M die Mittelpunkte der einander entsprechenden Seiten $\overline{BA}$ beziehungsweise $\overline{B'A'}$ sind, ist die gesamte Figur CAC_0B der Figur $CA'MB'$ ähnlich. Insbesondere ist $|\sphericalangle ACC_0| = |\sphericalangle MCA'|$.

Nach Konstruktion von g ist die Größe des Winkels zwischen g und der Geraden CB gleich $|\sphericalangle ACC_0|$, also gleich $|\sphericalangle MCA'|$. Daher fallen die Geraden CM und g zusammen, und g geht wie behauptet durch M.

Auch die Dreiecke HAB und $HA'B'$ sind zueinander gegenorientiert ähnlich, denn es gelten $|\sphericalangle AHB| = |\sphericalangle A'HB'|$ als Scheitelwinkel und $|\sphericalangle HB'A'| = |\sphericalangle BB'A'| = |\sphericalangle BAA'| = |\sphericalangle BAH|$, da es sich um Umfangswinkel über der Sehne $\overline{A'B}$ handelt.

Wie im vorigen Absatz folgt hieraus die Ähnlichkeit der Figuren HBC_0A und $HA'MB'$, die ihrerseits impliziert, dass auch h durch M verläuft.

Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung: Das Spiegelbild der Seitenhalbierenden an der Winkelhalbierenden des der Seite gegenüberliegenden Winkels, hier also die Gerade g, nennt man auch einen Symmedian. Die drei Symmedianen eines Dreiecks haben viele interessante Eigenschaften. Zum Beispiel schneiden sie sich in einem Punkt, dem sogenannten Symmedianenpunkt oder Lemoinepunkt.

621146 Lösung *7 Punkte*

Wegen

$$f(0) = 1 > 0\,, \qquad f(2) = 8 - 12 + 1 < 0 \qquad \text{und} \qquad f(3) = 27 - 27 + 1 > 0$$

muss aufgrund des positiven Leitkoeffizienten und des ungeraden Grades des Polynoms $f(x)$ (mindestens) eine Nullstelle negativ sein sowie je eine in den Intervallen $(0,2)$ und $(2,3)$ liegen. Weil ein Polynom dritten Grades höchstens drei Nullstellen besitzt, folgt

$$x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3 < 3\,,$$

und $\lceil x_3^1 \rceil = 3$ ist durch 3 teilbar.

Nach dem Wurzelsatz des Vieta gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Mit $2 < x_3 < 3$ folgt daraus $0 < x_1 + x_2 < 1$. Das verbessert die Abschätzung der Nullstellen zu

$$0 < -x_1 < x_2 < 2 < x_3 < 3\,. \tag{1}$$

Für jede der drei Nullstellen gilt

$$x_i^3 = 3x_i^2 - 1\,, \tag{2}$$

$$\left(x_i^2\right)^3 = \left(x_i^3\right)^2 = (3x_i^2 - 1)^2 = 9\left(x_i^2\right)^2 - 6x_i^2 + 1\,.$$

Die Zahlen x_1^2, x_2^2 und x_3^2 sind damit Nullstellen des Polynoms $f_2(x) = x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. Da die x_i^2 wegen (1) paarweise verschieden sind, gibt es keine weiteren Nullstellen von $f_2(x)$. Nach (1) gilt dabei $x_1^2 < x_2^2 < 4$. Aus

$$f_2(8) = \big((8-9)\cdot 8 + 6\big)\cdot 8 - 1 = -2\cdot 8 - 1 < 0$$

folgt die Existenz einer Nullstelle größer als 8, es muss also $8 < x_3^2 < 3^2 = 9$ gelten. Damit ist $\lceil x_3^2 \rceil = 9$ ebenfalls durch 3 teilbar.

Aus Anwendung des Wurzelsatzes des Vieta auf $f_2(x)$ folgt $x_1^2 + x_2^2 = 9 - x_3^2$. Daraus ergibt sich

$$0 = 9 - 9 < x_1^2 + x_2^2 < 9 - 8 = 1 \tag{3}$$

und somit eine weitere Verschärfung der Abschätzungen (1) zur Lage der Nullstellen,

$$0 < -x_1 < x_2 < 1 < 2 < x_3 < 3\,. \tag{4}$$

Für den weiteren Beweis werden die Summen $s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ betrachtet. Es gilt $s_0 = 3$; bereits berechnet wurden $s_1 = 3$ und $s_2 = 9$. Für $n \geq 3$ multipliziert man (2) mit x_i^{n-3}, summiert über alle Indizes $i = 1, 2, 3$ und erhält

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-3}\,. \tag{5}$$

Sind s_{n-1}, s_{n-3} ganz und ist s_{n-3} durch 3 teilbar, so ist auch s_n eine durch 3 teilbare ganze Zahl. Da alle drei Anfangswerte s_0, s_1 und s_2 durch 3 teilbare ganze Zahlen sind, ist s_n für alle positiven ganzen Zahlen n eine durch 3 teilbare ganze Zahl.

Aus (4) und (3) folgt wegen $|x_1|\,, |x_2| < 1$ für alle ganzen $n \geq 3$

$$0 < -\left|x_1\right|^n + x_2^n \leq x_1^n + x_2^n \leq \left|x_1\right|^n + x_2^n \leq x_1^2 + x_2^2 < 1\,,$$

und damit ist $\lceil x_3^n \rceil = \lceil s_n - (x_1^n + x_2^n) \rceil = s_n - \lfloor x_1^n + x_2^n \rfloor = s_n - 0$ durch 3 teilbar.

Bemerkungen: Es gibt eine Vielzahl weiterer Beziehungen, die für die Diskussion der Lage der Nullstellen herangezogen werden können. Durch Probieren weiterer Werte für x lassen sich die Nullstellen feiner abschätzen, z. B. lässt sich $-0{,}6 < x_1 < -0{,}5$ und $0{,}6 < x_2 < 0{,}7$ zeigen, woraus sich die betreffenden Abschätzungen in (3) und (4) numerisch ergeben. Eine andere Möglichkeit ist die offensichtliche Formel $f(-x) = f(x) - 2x^3$. Setzt man hier $x_2 > 0$ ein, so ergibt sich $f(-x_2) < 0$, woraus direkt $-x_2 < x_1$ folgt.

Die Formel (5) ist ein Spezialfall der Newton-Identität.

62. Mathematik-Olympiade
4. Runde (Bundesrunde)
Lösungen – 2. Tag

621244 Lösung *6 Punkte*

Erste Lösung: Zur Vereinfachung der Lösungsdarstellung beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: Für einen reellen Parameter p und drei reelle Zahlen a, b und c gelte

$$a + \frac{p}{b} = b + \frac{p}{c} = c + \frac{p}{a}\,.$$

Ist dann nicht $a = b = c$, so muss $(abc)^2 = p^3$ gelten.

Beweis des Hilfssatzes: Für die Differenzen der Zahlen folgt unter Beachtung der Formel $1/y - 1/x = (x - y)/(xy)$ aus den Gleichungen

$$a - b = \frac{p}{bc}(b - c)\,, \qquad b - c = \frac{p}{ca}(c - a) \qquad \text{und} \qquad c - a = \frac{p}{ab}(a - b)\,.$$

Gilt $a = b$, ergibt sich aus der rechten Gleichung $c = a$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist $a \neq b$. Damit folgt aus der ersten Gleichung $b \neq c$ und aus der zweiten $c \neq a$. Dividiert man dann das Produkt der drei Gleichungen durch $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$, so erhält man $1 = p^3/(abc)^2$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir setzen nun voraus, dass die reellen Zahlen a, b, c und s das Gleichungssystem

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a} = s \tag{1}$$

erfüllen. Kehrwerte sind für 0 nicht definiert und stets ungleich 0, also können die Zahlen a, b und c weder mit 0 noch mit s übereinstimmen. Wäre $s = 0$, würde $ab = bc = ca = -4$, also $(abc)^2 = (ab)(bc)(ca) < 0$, gelten; das ist nicht möglich. Also ist auch $s \neq 0$.

Für $abcs \neq 0$ lässt sich äquivalent umformen

$$s = c + \frac{4}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \frac{ac}{s} + \frac{4}{s} = \frac{abc}{sb} + \frac{4}{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{4}{s} = a - \frac{abc}{sb}\,.$$

Zusammen mit den analogen Umformungen der anderen Terme gilt also mit $M = -abc/s$

$$a + \frac{M}{b} = b + \frac{M}{c} = c + \frac{M}{a} = \frac{4}{s}\,. \tag{2}$$

Wir wenden den Hilfssatz auf (1) und (2) an.

Ist $a = b = c$ eine falsche Aussage, so folgt $(abc)^2 = 4^3$ aus (1), und aus (2) ergibt sich $(abc)^2 = M^3 = -(abc)^3/s^3$; zusammengefasst erhalten wir $s^3 = -abc = \pm 2^3$.

Fall 1: $a = b = c$. Für jede reelle Zahl $t \neq 0$ erfüllt das Tripel mit $a = b = c = t$ offensichtlich alle Bedingungen der Aufgabe. (In diesem Fall ist $s = t + 4/t$ ohne Interesse.)

Fall 2: $s = 2$. Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ und $b = t$. Dann folgt aus der Gleichheit von s mit den ersten beiden Termen von (1) die Gültigkeit von $a = 2 - 4/t$ und $c = 4/(2-t)$. Für den dritten gilt dann auch

$$c + \frac{4}{a} = \frac{4}{2-t} + \frac{4}{2-\frac{4}{t}} = \frac{4}{2-t} + \frac{4t}{2t-4} = \frac{4}{2-t} - \frac{2t}{2-t} = 2\,.$$

Fall 3: $s = -2$. Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ und $b = t$ folgt analog $a = -2 - 4/t$ und $c = -4/(2+t)$. Tatsächlich gilt dann wieder für den dritten Term

$$c + \frac{4}{a} = -\frac{4}{2+t} - \frac{4}{2+\frac{4}{t}} = -\frac{4}{2+t} - \frac{4t}{2t+4} = -2\,.$$

Da in den Fällen 2 und 3 verschiedene Werte für s vorliegen und stets $a \neq b$ ist, gibt es drei Scharen von Lösungen, nämlich

$$(t,\, t,\, t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,,$$
$$\left(\frac{2t-4}{t},\, t,\, \frac{4}{2-t}\right), \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}\,, \qquad \left(-\frac{2t+4}{t},\, t,\, -\frac{4}{2+t}\right), \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0,-2\}\,.$$

Zweite Lösung: Es sei (a, b, c) eine beliebige Lösung. Dann muss jede der Zahlen a, b, c ungleich Null sein.

Die Aufgabe enthält zwei Gleichungen für die drei Unbekannten a b und c; sie kann gelöst werden, indem man eine Variable eliminiert und aus der entstehenden Gleichung (oder aus für verschiedene Fälle entstehenden Gleichungen) eine der verbleibenden Variablen in Abhängigkeit von den anderen darstellt. Die Probe mit allen drei Variablen schließt dann die Lösung ab und liefert gegebenenfalls Einschränkungen in der freien Wahl der dritten Variablen.

Erste Variante (Kombination): Mit der Abkürzung $s = a + 4/b$ lassen sich die zwei Gleichungen als

$$c = a + \frac{4}{b} - \frac{4}{a} = s - \frac{4}{a}\,, \qquad \frac{4}{c} = a + \frac{4}{b} - b = s - b \tag{3}$$

schreiben. Die Multiplikation beider Gleichungen liefert

$$4 = s^2 - \left(\frac{4}{a} + b\right) \cdot s + \frac{4b}{a} = s \cdot \left(s - \frac{4}{a} - b\right) + \frac{4b}{a} = s \cdot \left(a + \frac{4}{b} - \frac{4}{a} - b\right) + \frac{4b}{a}\,.$$

Wegen $a - b + 4/b - 4/a = (a-b)(1 + 4/ab) = (a-b) \cdot s/a$ muss also

$$0 = \frac{a-b}{a} \cdot s^2 + \frac{4b}{a} - \frac{4a}{a} = \frac{a-b}{a} \cdot (s^2 - 4) = \frac{a-b}{a} \cdot (s-2) \cdot (s+2)$$

gelöst werden. Es verbleibt die notwendige Bedingung

$$0 = \big(a-b\big)\big(a + \frac{4}{b} - 2\big)\big(a + \frac{4}{b} + 2\big)\,. \tag{4}$$

Setzt man die drei Faktoren einzeln gleich null, lässt sich a in Abhängigkeit von b berechnen. Der Wert von c ergibt sich aus einer der Gleichungen (3), die andere liefert die Probe. Wir erhalten damit die gleichen Fälle wie in der ersten Lösung.

Zweite Variante (Einsetzen): Wir setzen

$$c = a + \frac{4}{b} - \frac{4}{a} = \frac{a^2 b + 4a - 4b}{ab}$$

ein und erhalten aus der ersten Gleichung

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4ab}{a^2b + 4a - 4b}\,.$$

Multiplikation mit $b \cdot (a^2b + 4a - 4b)$ liefert

$$0 = a^3b^2 - a^2b^3 + 8a^2b - 12ab^2 + 4b^3 + 16a - 16b\,.$$

Die Gleichung gilt für $a = b$. Wir versuchen daher, $a - b$ auszuklammern, und erhalten

$$0 = (a-b)(a^2b^2 + 8ab - 4b^2 + 16)\,. \tag{5}$$

Quadratische Ergänzung und eine binomische Formel ergeben die Faktorisierung

$$0 = (a-b)\big((ab+4)^2 - 4b^2\big) = (a-b)(ab+4+2b)(ab+4-2b)\,,$$

die (wegen $b \neq 0$) zu (4) äquivalent ist.

Dritte Variante (Gleichsetzen): Wir stellen zwei Gleichungen nach c um und setzen gleich:

$$c = \frac{4}{a - b + \frac{4}{b}}\,, \qquad\qquad c = a + \frac{4}{b} - \frac{4}{a} = 4 \cdot \frac{a-b}{ab} + a\,.$$

Damit muss

$$4 \cdot \frac{a-b}{ab} + a = \frac{4}{a - b + \frac{4}{b}}$$

gelten. Multiplikation mit dem Nenner der rechten Seite ergibt

$$\frac{4}{ab}(a-b)^2 + \left(a + \frac{16}{ab^2}\right)(a-b) + \frac{4a}{b} = 4 = \frac{4b}{b}\,,$$

$$0 = (a-b) \cdot \left(\frac{4}{b} - \frac{4}{a} + a + \frac{16}{ab^2} + \frac{4}{b}\right) = \frac{1}{ab^2} \cdot (a-b) \cdot \big(8ab - 4b^2 + a^2b^2 + 16\big)\,,$$

was äquivalent zu (5) ist.

Jede der Varianten führt auf die selben Lösungen wie oben.

Ergebnis: Es gibt drei Scharen von Lösungen, nämlich

$$(t,\, t,\, t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,,$$

$$\left(\frac{2t-4}{t},\, t,\, \frac{4}{2-t}\right), \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}\,, \qquad \left(-\frac{2t+4}{t},\, t,\, -\frac{4}{2+t}\right), \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0, -2\}\,.$$

Dritte Lösung: Wir nehmen wieder an, dass (a, b, c) eine Lösung ist, setzen

$$s = a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$$

und stellen fest, dass a, b und c weder die Werte 0 noch s annehmen können. Mit der für $x \neq s$ definierten Funktion

$$f(x) = \frac{4}{s - x}$$

können wir die gegebenen Gleichungen in der Form

$$b = f(a)\,, \qquad c = f(b)\,, \qquad a = f(c) \tag{6}$$

schreiben. Folglich ist

$$a = f(f(f(a)))\,,$$

also ist a ein Fixpunkt der dritten Iterierten f^3 von f. Gleiches gilt für b und c. Einfache Umformungen führen auf

$$a = f(f(f(a))) = \cfrac{4}{s - \cfrac{4}{s - \cfrac{4}{s-a}}} = \frac{4s^2 - 4as - 16}{s^3 - as^2 - 8s + 4a}\,,$$

und somit gilt

$$as^3 - a^2s^2 - 8as + 4a^2 = 4s^2 - 4as - 16\,,$$

also

$$0 = (-s^2+4)a^2 + (s^3 - 4s)a - 4s^2 + 16 = (-a^2 + as - 4)(s^2 - 4)\,.$$

Fall 1: $s^2 \neq 4$. Dann ist $a^2 - as + 4 = 0$. Also gilt $a \neq s$ und $f(a) = 4/(s-a) = a$. Aus (6) folgt zunächst $b = f(a) = a$ und danach $c = f(b) = f(a) = a$, also stimmen alle Variablen überein. Dies führt zu den Lösungen $a = b = c = t$ mit beliebigem reellem $t \neq 0$.

Fall 2: $s^2 = 4$. In diesem Fall gilt

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a} = s = \pm 2\,.$$

Damit erhalten wir wieder genau die Lösungen der Fälle 2 und 3 aus der ersten Lösung.

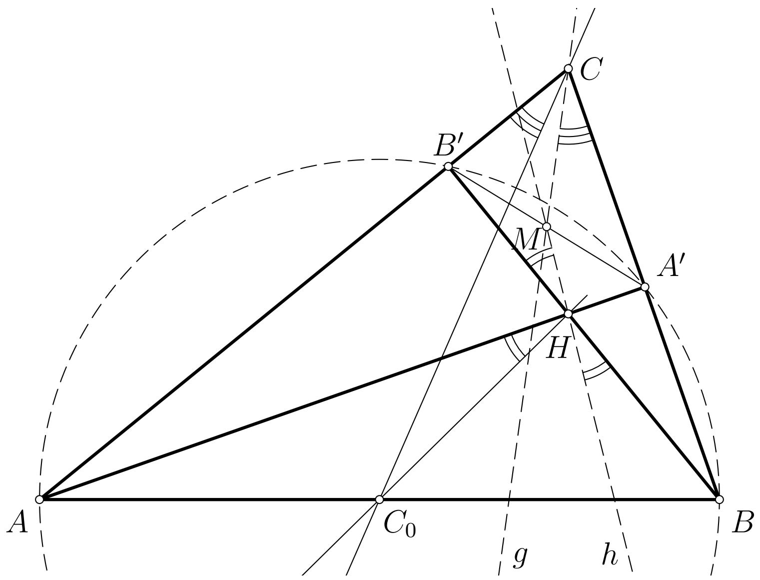
Es folgt wiederum:

Ergebnis: Es gibt drei Scharen von Lösungen, nämlich

$$(t,\,t,\,t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,,$$

$$\left(\frac{2t-4}{t},\, t,\, \frac{4}{2-t}\right), \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}\,, \qquad \left(-\frac{2t+4}{t},\, t,\, -\frac{4}{2+t}\right), \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0,-2\}\,.$$

<u>621245 Lösung</u> *7 Punkte*



L 621245

Es wird nachgewiesen, dass sowohl g als auch h durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{A'B'}$ gehen.

Wegen $|\sphericalangle AB'B| = |\sphericalangle AA'B| = 90°$ ist nach der Umkehrung des Satzes des Thales $\square\, ABA'B'$ ein Sehnenviereck. Folglich sind $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CA'B'|$ und $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle A'B'C|$, d. h. die beiden Dreiecke CAB und $CB'A'$ sind zueinander gegenorientiert ähnlich. Da C_0 und M die Mittelpunkte der einander entsprechenden Seiten $\overline{BA}$ beziehungsweise $\overline{B'A'}$ sind, ist die gesamte Figur CAC_0B der Figur $CA'MB'$ ähnlich. Insbesondere ist $|\sphericalangle ACC_0| = |\sphericalangle MCA'|$.

Nach Konstruktion von g ist die Größe des Winkels zwischen g und der Geraden CB gleich $|\sphericalangle ACC_0|$, also gleich $|\sphericalangle MCA'|$. Daher fallen die Geraden CM und g zusammen, und g geht wie behauptet durch M.

Auch die Dreiecke HAB und $HA'B'$ sind zueinander gegenorientiert ähnlich, denn es gelten $|\sphericalangle AHB| = |\sphericalangle A'HB'|$ als Scheitelwinkel und $|\sphericalangle HB'A'| = |\sphericalangle BB'A'| = |\sphericalangle BAA'| = |\sphericalangle BAH|$, da es sich um Umfangswinkel über der Sehne $\overline{A'B}$ handelt.

Wie im vorigen Absatz folgt hieraus die Ähnlichkeit der Figuren HBC_0A und $HA'MB'$, die ihrerseits impliziert, dass auch h durch M verläuft.

Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung: Das Spiegelbild der Seitenhalbierenden an der Winkelhalbierenden des der Seite gegenüberliegenden Winkels, hier also die Gerade g, nennt man auch einen Symmedian. Die drei Symmedianen eines Dreiecks haben viele interessante Eigenschaften. Zum Beispiel schneiden sie sich in einem Punkt, dem sogenannten Symmedianenpunkt oder Lemoinepunkt.

621246 Lösung *7 Punkte*

Wegen

$$f(0) = 1 > 0\,, \qquad f(2) = 8 - 12 + 1 < 0 \qquad \text{und} \qquad f(3) = 27 - 27 + 1 > 0$$

muss aufgrund des positiven Leitkoeffizienten und des ungeraden Grades des Polynoms $f(x)$ (mindestens) eine Nullstelle negativ sein sowie je eine in den Intervallen $(0, 2)$ und $(2, 3)$ liegen. Weil ein Polynom dritten Grades höchstens drei Nullstellen besitzt, folgt

$$x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3 < 3\,,$$

und $\lceil x_3^1 \rceil = 3$ ist durch 3 teilbar.

Nach dem Wurzelsatz des Vieta gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Mit $2 < x_3 < 3$ folgt daraus $0 < x_1 + x_2 < 1$. Das verbessert die Abschätzung der Nullstellen zu

$$0 < -x_1 < x_2 < 2 < x_3 < 3\,. \tag{1}$$

Für jede der drei Nullstellen gilt

$$x_i^3 = 3x_i^2 - 1\,, \tag{2}$$

$$\left(x_i^2\right)^3 = \left(x_i^3\right)^2 = (3x_i^2 - 1)^2 = 9\left(x_i^2\right)^2 - 6x_i^2 + 1\,.$$

Die Zahlen x_1^2, x_2^2 und x_3^2 sind damit Nullstellen des Polynoms $f_2(x) = x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. Da die x_i^2 wegen (1) paarweise verschieden sind, gibt es keine weiteren Nullstellen von $f_2(x)$. Nach (1) gilt dabei $x_1^2 < x_2^2 < 4$. Aus

$$f_2(8) = \big((8 - 9) \cdot 8 + 6\big) \cdot 8 - 1 = -2 \cdot 8 - 1 < 0$$

folgt die Existenz einer Nullstelle größer als 8, es muss also $8 < x_3^2 < 3^2 = 9$ gelten. Damit ist $\lceil x_3^2 \rceil = 9$ ebenfalls durch 3 teilbar.

Aus Anwendung des Wurzelsatzes des Vieta auf $f_2(x)$ folgt $x_1^2 + x_2^2 = 9 - x_3^2$. Daraus ergibt sich

$$0 = 9 - 9 < x_1^2 + x_2^2 < 9 - 8 = 1 \tag{3}$$

und somit eine weitere Verschärfung der Abschätzungen (1) zur Lage der Nullstellen,

$$0 < -x_1 < x_2 < 1 < 2 < x_3 < 3\,. \tag{4}$$

Für den weiteren Beweis werden die Summen $s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ betrachtet. Es gilt $s_0 = 3$; bereits berechnet wurden $s_1 = 3$ und $s_2 = 9$. Für $n \geq 3$ multipliziert man (2) mit x_i^{n-3}, summiert über alle Indizes $i = 1, 2, 3$ und erhält

$$s_n = 3s_{n-1} - s_{n-3}\,. \tag{5}$$

Sind s_{n-1}, s_{n-3} ganz und ist s_{n-3} durch 3 teilbar, so ist auch s_n eine durch 3 teilbare ganze Zahl. Da alle drei Anfangswerte s_0, s_1 und s_2 durch 3 teilbare ganze Zahlen sind, ist s_n für alle positiven ganzen Zahlen n eine durch 3 teilbare ganze Zahl.

Aus (4) und (3) folgt wegen $|x_1|, |x_2| < 1$ für alle ganzen $n \geq 3$

$$0 < -|x_1|^n + x_2^n \leq x_1^n + x_2^n \leq |x_1|^n + x_2^n \leq x_1^2 + x_2^2 < 1\,,$$

und damit ist $\lceil x_3^n \rceil = \lceil s_n - (x_1^n + x_2^n) \rceil = s_n - \lfloor x_1^n + x_2^n \rfloor = s_n - 0$ durch 3 teilbar.

Bemerkungen: Es gibt eine Vielzahl weiterer Beziehungen, die für die Diskussion der Lage der Nullstellen herangezogen werden können. Durch Probieren weiterer Werte für x lassen sich die Nullstellen feiner abschätzen, z. B. lässt sich $-0{,}6 < x_1 < -0{,}5$ und $0{,}6 < x_2 < 0{,}7$ zeigen, woraus sich die betreffenden Abschätzungen in (3) und (4) numerisch ergeben. Eine andere Möglichkeit ist die offensichtliche Formel $f(-x) = f(x) - 2x^3$. Setzt man hier $x_2 > 0$ ein, so ergibt sich $f(-x_2) < 0$, woraus direkt $-x_2 < x_1$ folgt.

Die Formel (5) ist ein Spezialfall der Newton-Identität.